

EXPERIMENTO ALEATORIO es aquél cuyos resultados dependen del azar.

- ej: lanzar una moneda, el nº de hijos de una familia, ...

1. Cita 5 ejemplos de experimentos aleatorios y otros 5 que sean funcionales.

ESPACIO MUESTRAL es el formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, se designa por (E).

- ej: al lanzar dos monedas y anotar los resultados obtenidos, $E=\{CC, CX, XC, XX\}$

2. Poner ejemplos de experimentos aleatorios y sus espacios muestrales correspondientes.

El espacio muestral puede ser

{	Discreto	{	con nº finito de resultados
		}	con nº infinito de resultados
	Continuo	con nº infinito de resultados	

Los Discretos están formados por puntos sueltos y los Continuos por los infinitos puntos de todo un intervalo.

- ej: .- lanzar un dado una vez, $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, discreto con nº finito de resultados
- .- lanzar una moneda hasta que salga cara, $E=\{1, 2, 3, \dots\}$, discreto con infinitos resultados
- .- tiempo de espera de un autobús, $E=[0,20[$, continuo con infinitos resultados

3. Entre los ejemplos puestos anteriormente (2), clasifica los espacios muestrales correspondientes.

SUCESO ALEATORIO es cada uno de los subconjuntos del espacio muestral.

ESPACIO DE SUCESOS (S) es el conjunto de todos los subconjuntos de E.

Tipos de Sucesos:

- Elementales, formados por un solo punto muestral
- Compuestos, formados por varios puntos muestrales
- Seguro (cierto), el que siempre se realiza (E)
- Imposible, el que nunca se realiza (\emptyset)

- ej: al lanzar un dado de quinielas y anotar el símbolo obtenido ...

$E=\{1, X, 2\}$

$S=\{\emptyset, \{1\}, \{X\}, \{2\}, \{1, X\}, \{1, 2\}, \{X, 2\}, \{1, X, 2\}\}$

Sucesos elementales: $\{1\}, \{X\}, \{2\}$

Sucesos compuestos: $A=\{1, X\}$ $B=\{X, 2\}$

Suceso cierto: $\{1, X, 2\}$

Suceso imposible: $\{\emptyset\}$

4. Al lanzar un dado numerado del 1 al 6, escribe el Espacio Muestral, Espacio de Sucesos, Sucesos Elementales, Suceso Seguro, Suceso Imposible, "salir número par", "salir múltiplo de 3", "salir número menor que 3".

5. En los siguientes experimentos aleatorios, determina el Espacio Muestral (E) y pon un par de ejemplos de sucesos de distinto tipo:

$A=\{\text{lanzar dos monedas y anotar el número de caras}\}$

$B=\{\text{extraer una carta de una baraja española y anotar qué sale}\}$

$C=\{\text{lanzar dos dados y anotar la suma de puntos que salgan}\}$

En cada uno de los experimentos anteriores, indicar cuál es Suceso Seguro, el Suceso Imposible, citar algunos Sucesos Simples (un elemento) y otros Compuestos (varios elementos).

6. En una urna tenemos 10 bolas de colores numeradas: Una gris, la número 1. Dos verdes, la número 3 y la 6. Tres azules, la número 2, 8 y 9. Cuatro amarillas, las número 4, 5, 7 y 10. Escribe una experiencia aleatoria, describe el espacio muestral y cinco sucesos.

7. Califica de "casi seguro", "probable", "poco probable" o "casi imposible", cada uno de los siguientes sucesos:

- Acertar la Lotería Primitiva con una única apuesta.
- Obtener doble 6 al lanzar dos dados.
- Que un equipo de fútbol de 1ª división gane algún partido.
- Que en Bruselas llueva al menos veinte días durante un año.

FRECUENCIA ABSOLUTA de un suceso A , $f(A)$, es el número de veces que se repite el suceso A al repetir el experimento n veces.

FRECUENCIA RELATIVA de un suceso A , $f_r(A)$, es el cociente entre su frecuencia absoluta y el nº total de pruebas realizadas. $f_r(A) = \frac{f(A)}{n}$

8. Al lanzar un dado 60 veces, obtengo los resultados indicados en la siguiente tabla:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	8	11	9	10	11	11

Obtén las frecuencias relativas de los siguientes sucesos:

- a) $A = \{\text{obtener un 2}\}$
- b) $B = \{\text{obtener un número impar}\}$
- c) $C = \{\text{obtener un 3 o un 4}\}$

Propiedades de la frecuencia relativa:

- $0 \leq f_r(A) \leq 1$
- $f_r(E) = 1$
- $f_r(\emptyset) = 0$
- Si A y B son incompatibles $\rightarrow f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$
- Si un experimento lo repetimos bajo análogas condiciones indefinidamente, la frecuencia relativa de cada suceso tiende a estabilizarse.

La PROBABILIDAD nos mide hasta qué punto se puede esperar que ocurra un suceso. PROBABILIDAD de un suceso es el nº hacia el cual tiende su frecuencia relativa cuando el nº de experimentaciones se acerca a infinito. $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_r(A)$

Ley de LAPLACE: $P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables de } A}{\text{nº de casos posibles de } E}$

- ej: ¿cuál es la probabilidad de obtener un nº par al lanzar un dado?
 $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A = \{\text{nº par}\} = \{2, 4, 6\}$ \rightarrow $P(A) = 3/6 = 0.5$

Probabilidad a Priori de un suceso es la que se estima antes de realizar un experimento.

Probabilidad a Posteriori de un suceso es la estimada tras la realización de la experiencia.

Propiedades de la Probabilidad:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad P(E)=1 \quad P(\emptyset)=0 \quad P(A')=1-P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A y B incompatibles $\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- ej: al extraer una carta de una baraja española, ¿cuál es la probabilidad de que sea "un oro o un as"?

$$A = \{\text{Oro}\} \rightarrow P(A) = 10/40 = 0'25 \quad B = \{\text{As}\} \rightarrow P(B) = 4/40 = 0'1$$

$$A \cup B = \{\text{Oro o As}\} \rightarrow P(A \cup B) = 0'25 + 0'1 - 0'025 = 0'325 \quad A \cap B = \{\text{Oro y As}\} \rightarrow P(A \cap B) = 1/40 = 0'025$$

9. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?

A = {extraer el 3 de copas en una baraja española}

B = {coger al azar el 6 doble entre las fichas del dominó}

10. Se extrae una carta de una baraja española, calcula la probabilidad de los sucesos:

A = {figura} B = {bastos o espadas} C = {rey u oro}

11. De una bolsa que tiene 10 bolas numeradas del 0 al 9, se extrae una al azar, obtén las probabilidades de los sucesos siguientes:

A = {número impar} B = {> 5} C = {diferente de 7}

D = {número par} E = {múltiplo de 3} F = {≤ 4}

12. Se extrae una bola de una bolsa que contiene 4 bolas blancas, 5 amarillas, 5 azules y 3 verdes. Obtén la probabilidad de los sucesos: A = {roja} B = {no sea blanca}

13. Se lanzan dos dados y se anota la suma de los puntos obtenidos, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos: A = {4} B = {2} C = {7} D = {11} E = {> 10} F = {≤ 4}

14. Hemos lanzado 200 veces una moneda, obteniendo cara en 140 lanzamientos. Calcula la probabilidad «a priori» y la probabilidad «a posteriori» para la obtención de una cara.

15. Tenemos una ruleta dividida en ocho sectores iguales numerados del 1 al 8, hacemos girar una flecha y anotamos el número que indica. Calcula las probabilidades de los sucesos:

A = {número par} B = {número impar} C = {≥ 3} D = {≠ 7}

16. Extraemos una ficha de un dominó y calculamos la probabilidad de que:

A = {la suma de punts siga igual a 6} B = {la suma de punts siga menor que 4}

C = {siga una fitxa doble}

17. Escribimos cada una de las letras de la palabra MÚSICA en una ficha y las ponemos en una bolsa. Extraemos una letra al azar.

- Escribe los sucesos elementales de este experimento aleatorio. ¿Tienen todos la misma probabilidad?

- Escribe el suceso "obtener vocal" y calcula la probabilidad correspondiente.

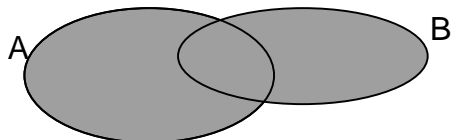
- Si la palabra escogida fuese DOMINO, ¿cómo responderías a los apartados anteriores?

18. Irene y Lucía juegan a cara o cruz con una moneda perfecta, el juego consiste en tirar tres veces la moneda. Si sale cara en la primera tirada, gana Irene, si no, se vuelve a tirar dos veces más, y si en las dos sale cara también gana Irene. En el resto de casos, gana Lucía.

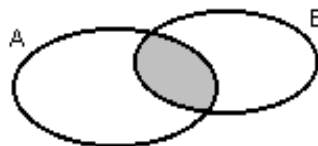
¿Quién tiene más probabilidades de ganar? Haz un diagrama de árbol para ayudarte.

OPERACIONES CON SUCESOS:

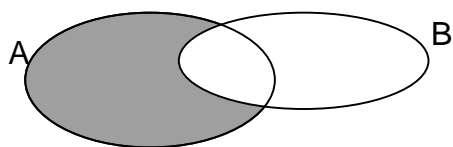
UNIÓN ($A \cup B$) de dos sucesos A y B es el que se produce cuando se realiza el suceso A o el suceso B.



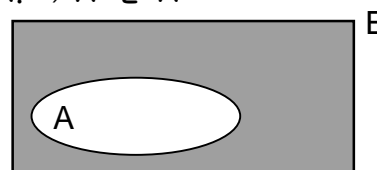
INTERSECCIÓN ($A \cap B$) de dos sucesos A y B es el que se produce cuando se realizan simultáneamente A y B.



DIFERENCIA ($A - B$) de dos sucesos A y B es el que se produce al verificarse A pero no cumplirse B. $\Rightarrow A - B = A - (A \cap B)$



CONTRARIO (A') de un suceso A es el que se verifica siempre que no se cumpla el suceso A. $\Rightarrow A' = E - A$



Dos sucesos A y B son COMPATIBLES en el caso de que $A \cap B \neq \emptyset$

Dos sucesos A y B son INCOMPATIBLES cuando que $A \cap B = \emptyset$. Imposibles a la vez.

EXPERIMENTOS COMPUESTOS son los formados por varios experimentos simples.

- ej: lanzar un dado y lanzar una moneda

19. Una bolsa contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10, extraemos una bola, ¿cuál es el espacio muestral?

Consideramos los sucesos $A = \text{"obtener número primo"}$ i $B = \text{"obtener múltiplo de 3"}$. Escribe los sucesos $A, B, A', B', A \cup B, A \cap B, A \cup A', A \cap A'$.

20. En un sorteo de lotería observamos la cifra en que acaba el "gordo".

¿Cuál es el espacio muestral?

Escribe los sucesos $A = \{>5\}$ y $B = \{\text{par}\}$

Calcula los sucesos: $A', B', A \cup B, A \cap B$ y $A' \cap B'$

21. En la lotería primitiva se extraen 6 bolas numeradas del 1 al 49, calcula la probabilidad de que la primera bola extraída sea:

$A = \{\text{número de una sola cifra}\}$

$B = \{\text{múltiplo de 7}\}$

$C = \{\text{mayor que 25}\}$

La probabilidad de Experimentos Compuestos es el producto de las probabilidades de los experimentos simples de los que se compone.

- ej: al lanzar una moneda y un dado, ¿qué probabilidad hay de obtener "cara y un 4"?

$$P(C, 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = 0'0833$$

Sucesos Independientes: cuando el resultado de ninguno de ellos depende del otro.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- ej: al extraer dos cartas de una baraja, devolviendo cada una después de cada extracción, ¿cuál es la probabilidad de extraer "dos ases"?

$$P(As, As) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = 0'01$$

Sucesos Dependientes: cuando el resultado de uno de ellos depende del otro.

Probabilidad Condicionada: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)}$

- ej: al extraer dos cartas de una baraja sin devolución, ¿cuál es la probabilidad de extraer "dos ases"?
$$P(\text{As, As}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = 0'0077$$

22. Dos jugadores de pelota juegan un partido a 21 puntos (gana el primero que llegue a 21). Casi al final de un partido, cuando un jugador, Pablo, lleva 20 puntos, el otro jugador, Jaime, lleva 18. ¿Qué probabilidad tiene Pablo de ganar? ¿Y Jaime? Haz un diagrama de árbol que te ayude.

23. Extraes una carta de una baraja española, la miras y la devuelves al montón, haciendo a continuación una segunda extracción. ¿Cuál es la probabilidad de que hayan sido ...?

A={dos reyes} B={la primera un oro y la segunda una figura}

C={el as de oros la primera y oro la segunda}

D={figura la primera y rey la segunda}

24. Al lanzar tres monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener tres caras? ¿Y de obtener alguna cara? ¿Y de no obtener ninguna cara?

25. Lanzas dos monedas y un dado, calcula la probabilidad de obtener dos caras y un cinco.

26. Al extraer una carta de una baraja española, indica cuál es la probabilidad de que sea:

A={rey o as}

B={figura o oro}

C={no sea espada}

27. Una urna contiene 100 bolas numeradas así : 00, 01, 02, ...,99. Llamamos x a les decenas e y, la cifra de les unidades correspondientes. Se extrae una bola al azar, calcula la probabilidad de que:

a) $x=3$

b) $y=3$

c) $x \neq 7$

d) $x > 5$

e) $x+y=9$

f) $x < 3$

g) $y > 7$

28. Extraemos, una después de otra, tres cartas de una baraja española con reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de obtener bastos las tres veces? ¿Qué hubiera ocurrido si, después de cada extracción, se hubiera devuelto cada carta al montón?

29. Una urna contiene 5 bolas negras y 3 de blancas. Extraemos 3 bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean blancas? ¿Y negras?

Repetir el experimento, pero devolviendo después de cada extracción las bolas a la urna.

30. En un laboratorio someten a un medicamento nuevo a tres controles. La probabilidad de pasar el primero es 0'89, la de pasar el segundo es 0'93 y la de pasar el tercero es 0'85. ¿Cuál es la probabilidad de que el medicamento ...?

a) Pase los tres controles

b) Pase sólo el primer control

c) Pase el primer y el tercer controles

d) No pase ningún control

31. Javier tiene en su portamonedas 4 de cinco céntimos, 3 de veinte y 2 de un euro. Saca dos monedas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?:

a) ambas de 5 céntimos

b) ninguna de 1 €

c) que sumen 1'20 €

32. Un jugador de baloncesto tiene un promedio del 75% en sus lanzamientos de tiros libres. Si acierta el primer tiro, puede volver a tirar una segunda vez. Calcula la probabilidad de que ...

a) haga dos puntos

b) haga un punto

c) no haga ninguno

33. La probabilidad de nacer niña es 0'54. En una familia con tres hijos, halla la probabilidad que tiene de que sean ...
a) tres niños b) tres niñas c) dos niñas y un niño d) al menos una niña

34. En un centro escolar hay 1000 alumnos repartidos así:

	chicos	chicas	Total
Con gafas	147		282
Sin gafas		350	
Total:			1000

Completa la tabla de contingencia y al elegir un alumno al azar, calcula la probabilidad de que:

A={sea chico}

B={sea chica}

C={use gafas}

D={no use gafas}

E={siga chica con gafas}

F={sea chico sin gafas}

35. En una empresa hay 200 empleados, la mitad de ellos son mujeres. Hay 40 hombres y 35 mujeres que fuman. Haz el diagrama de árbol y la tabla de contingencia correspondiente para calcular la probabilidad de que sea: A={hombre y no fume} B={mujer y fume}

36. En una reunión hay 21 personas, de las cuales 12 son hombres; una cuarta parte de los cuales son españoles, al igual que un tercio de las mujeres. Elegida una persona al azar, calcula la probabilidad de que sea:

a) de nacionalidad española

b) un hombre, sabiendo que es de España

37. En una clase hay 17 chicos y 18 chicas, escogemos al azar dos alumnos. Halla la probabilidad de que: A={ambos sean chicos} B={ambas sean chicas} C={sean un chico y una chica}

38. Tenemos tres urnas, con seis bolas de colores, cada una de ellas.

• En la urna A hay 3 bolas blancas, 1 azul, 1 verde y 1 roja

• En la urna B hay 4 bolas blancas, 1 azul y 1 negra

• En la urna C hay 5 bolas blancas y 1 verde

a) Si extraemos una bola y resulta que es blanca, ¿qué probabilidad hay que haya sido extraída de la urna A?

c) Si extraemos una bola y es azul, ¿qué probabilidad hay de que haya sido extraída de la urna A?

39. En una empresa hay 150 trabajadores. Se sabe que: 60 son hombres, hay 5 hombres viudos, 52 mujeres casadas y en total, 69 personas son solteras y 16 viudas. Nombra con su inicial a cada suceso y ...

a) Confecciona una tabla de doble entrada

• Se elige una persona al azar en la empresa. Calcula las probabilidades siguientes:

b) $P(H)$, $P(M)$, $P(S)$, $P(C)$, $P(V)$

c) Sea una mujer casada

d) Sabemos que la persona elegida es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que esté casada?

d) Sabemos que la persona elegida está casada, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

40. En un instituto los alumnos de ESO se distribuyen de la siguiente manera: hay un 35% de alumnos en 1º curso, un 25% en 2º, un 22% en 3º y el resto en 4º curs. El porcentaje de aprobados en cada curso és: 80% en primero, 75% en segundo, 60% en tercero y 55% en cuarto. Escogemos un alumno al azar y queremos calcular la probabilidad de que:

a) esté aprobado

b) sea de 3º curso, sabiendo que está suspendido

c) Si el instituto tiene 840 alumnos en ESO, ¿cuántos se esperan que hayan aprobado?

41. El 55% de las bombillas que tienen en una ferretería son de fabricación nacional; mientras que el 15% de las fabricadas aquí son defectuosas, el 15% de las fabricadas en el extranjero lo son. Si tomamos al azar una de ellas, obtén la probabilidad de que...
- Tenga algún defecto
 - Sea extranjera, si no tiene defecto alguno
 - Si hubiera 3000 bombillas, ¿cuántas se espera que no tengan defectos?
42. En un lugar se sabe que si hoy hace sol, la probabilidad que mañana también haga es $\frac{4}{5}$, pero si hoy está nublado, la probabilidad que mañana también lo esté es $\frac{2}{3}$.
Si hoy es viernes y hace sol, ¿cuál es la probabilidad de que el domingo también haga sol?
¿Cuál sería la probabilidad de que el sábado y el domingo no hiciera el mismo tiempo?
¿Y de que estuviera nublado todo el fin de semana?
43. Tres máquinas A, B y C producen el 50%, 30% y 20% respectivamente de un determinado artículo. Los porcentajes de artículos defectuosos fabricados por cada una de las máquinas son respectivamente el 3%, 4% y 5%.
- ¿Cuál será la probabilidad de que al seleccionar un artículo al azar, sea defectuoso?
 - Se selecciona un artículo al azar y no es defectuoso. Halla la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B.
44. Un ratón huye de un gato. En un momento dado, el camino que sigue se bifurca en tres (A, B y C), teniendo el ratón la misma probabilidad de escoger cualquiera de ellos; experimentalmente se conocen las siguientes probabilidades [+ significa que el gato caza al ratón]:
- $P(+ \text{ si va por A}) = 0.6$ $P(+ \text{ si va por B}) = 0.4$ $P(+ \text{ si va por C}) = 0.3$
- ¿Qué probabilidad hay de que el ratón sea cazado por el gato?
 - Sabiendo que el ratón fue cazado, ¿cuál es la probabilidad de que éste eligiera el camino A?
 - Contesta a las preguntas anteriores suponiendo que la probabilidad de que el ratón escoja cada uno de los caminos fuese: $P(A)=0.5$ $P(B)=0.3$ $P(C)=0.2$
45. Dos amigas juegan doce partidas al ajedrez, Rosa gana 6 de ellas, Teresa gana 4 y quedan en tablas 2 partidas. Ambas deciden jugar tres partidas más. Teniendo en cuenta, únicamente, los resultados anteriores, obtén la probabilidad de que:
- Rosa gane las tres partidas
 - Dos partidas queden en tablas
 - Rosa y Teresa ganen alternativamente
 - Teresa gane, al menos, una partida